Title	G.R.Robinson の $A_R(H)$-ブロックについて(群論と組合せ数学)
Author(s)	稗田, 吉成; 津島, 行男
Citation	数理解析研究所講究録 (1997), 991: 61-67
Issue Date	1997-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/61123
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
991巻 1997年 61-67

G.R.Robinson の $A_R(H)$-ブロックについて

大阪市立大学院生　稗田吉成　(Yoshimasa Hieda)
大阪市立大学理学部　津島行男　(Yukio Tsushima)

1　記号等の説明

G を有限群，p は G の位数を割り切る素数，(R,K,k) を p-モジュラー系，

すなわち，$\left\{\begin{array}{l} R\text{は完備離散付値環（その極大イデアルを }(\pi)\text{），} \\ K\text{は }R\text{の商体でその標数は }0, \\ k\text{は }R\text{の剰余体 }(R/(\pi))\text{ でその標数は }p \end{array}\right.$

とし，ここでは Kは 1 の $|G|$ 乗根の全てを含むと仮定する。

また G の部分集合 Xに対して，$\widehat{X}$は適当な係数環 $\mathfrak{o} \in \{R,K,k\}$ 上の群環 $\mathfrak{o}G$ における Xの元の和，$\widehat{X} := \sum_{x\in X} x$ を表すことにする。

Hを G の部分群とし，Hecke 環 $S_{\mathfrak{o}}(H) = \mathrm{End}_{\mathfrak{o}G}(\widehat{H}\mathfrak{o}G)$ を考える。ここで $e_H := \widehat{H}/|H|$ は KG のべき等元であり，$S_K(H) = e_H KG e_H$である。$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ に対し，e_χをχに対応する KG の中心的原始べき等元とし，$\Phi = \{\chi \in \mathrm{Irr}(G); (\chi|_H, 1_H)_H \neq 0\}$ とおく。このとき $\{e_\chi e_H; \chi \in \Phi\}$ が $S_K(H)$ の中心的原始べき等元全体の集合となることが知られている。([1, (11.26)Corollary] 参照)

ここで $S_K(H) = K \otimes_R S_R(H)$ であるから，$S_R(H)$ の中心的べき等元 δを取るとΦの空でない部分集合 βがあって $\delta = \sum_{\chi\in\beta} e_\chi e_H (\in RG)$ となる。このとき左の形の元を δ_βと書き，δ_βが $S_R(H)$ の中心的原始べき等元であるとき，$\delta_\beta S_R(H)$ 又は βを G.R.Robinson に従って $A_R(H)$-ブロックと呼ぶ。

一方，乗法によって $\phi: Z(RG) \longrightarrow Z(S_R(H))$ が誘導されるが，G.R.Robinson は [4] の中でこの準同型を使って $Z(S_R(H)) \simeq \mathrm{End}_{R[G\times G]}(RG\widehat{H}RG)$ (R-多元環) を示し，$RG\widehat{H}RG$ の $R[G\times G]$-加群としての直既約因子に対応させて $A_R(H)$-ブロックを定義した。ゆえに e_Bを RG のブロックべき等元とするとき，この準同型から$\phi(e_B) = \sum_\beta \delta_\beta$と分解され，これによって $\mathrm{Irr}(B)\cap\Phi$の $A_R(H)$-ブロックによる分割が生じる。

また，$\widehat{H}RG$が置換加群であることより $S_R(H)/\pi S_R(H) \simeq S_k(H)$ であり，従って $A_R(H)$-ブロックの集合は $S_k(H)$ の中心的原始べき等元の集合と 1 対 1 に対応している。

ここでは Hが p'-部分群のときに $A_R(H)$-ブロックについての直交関係を証明し，また $\phi(e_B)$ に現れる δ_βの個数を G のブロック Bに関する種々の不変量と関連付けて評価する。

上の記号以外も標準的な記号を使う。(例えば [1] や [3] を参照)

2 $A_R(H)$-ブロックの直交関係

この節以降のためにまず次の補題を準備する。

補題 1 A を任意の（単位元を含む）環とし，Mを有限生成 A-加群とする。
$\mathrm{End}_A(M)$ における id_Mの中心的べき等元による分解 $id_M = f_1 + f_2$が存在することと $\mathrm{Hom}_A(M_1, M_2) = 0, \mathrm{Hom}_A(M_2, M_1) = 0$ なる A-加群 M_1, M_2による Mの直和分解 $M = M_1 \oplus M_2$が存在することは同値である。
(証明) $(\Longrightarrow)$ $i = 1, 2$ に対して $M_i := f_i(M)$ とすると $M = M_1 \oplus M_2$. 任意の $f \in \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$ を取り，$\tilde{f}$を任意の $x \in M_2$に対して$\tilde{f}(x) = 0$ なる fの Mへの拡張とすると f_2は $\tilde{f}$と可換であるから $f = 0$。全く同様にして $\mathrm{Hom}_A(M_2, M_1) = 0$ も成り立つ。

$(\Longleftarrow)$ $i = 1, 2$ に対して，$f_i : M \to M_i$ $(f_i(m) = m_i)$ を M_iへの射影とすると $id_M = f_1 + f_2$ であり，f_iは $\mathrm{End}_A(M)$ のべき等元である。任意の $f \in \mathrm{End}_A(M)$ を取ると仮定から $f(M_i) \subset M_i$である。従って，任意の $m \in M$に対して，$f \cdot f_i(m) = f(m_i) = f(m)_i = f_i \cdot f(m)$ となり，f_iは中心の元である。□

$\mathfrak{A}_R(H) := \{\beta; \beta$は $A_R(H)$-ブロック$\}$とおく。$\phi(e_B) \neq 0$であれば，$\phi(e_B) = \sum_{\beta \in \Lambda_B} \delta_\beta$なる $\mathfrak{A}_R(H)$ の空でない部分集合 Λ_Bが存在する。そこで $r(B) := |\Lambda_B|$ とし，$\Lambda_B := \{\beta_1, \cdots, \beta_{r(B)}\}$ と表すことにするとき，この $r(B)$ を考察することがこの論文の目的の一つである。

命題 2 $l(B) = 1$ ならば，$r(B) \leq 1$ である。ここで $l(B) = |\mathrm{IBr}(B)|$.
(証明) $r(B) \neq 0$ としてよい。$l(B) = 1$ より，任意の（0 でない）B^*-加群 M_1, M_2に対し $\mathrm{Hom}_{kG}(hd(M_1), soc(M_2)) \neq 0$. これより $\mathrm{Hom}_{kG}(M_1, M_2) \neq 0$ であり，同様にして $\mathrm{Hom}_{kG}(M_2, M_1) \neq 0$ である。

$A := B^*, M = e_{B^*}\widehat{H}kG$ に対し，補題 1 を適用すると上のことから，$\phi(e_{B^*})S_k(H) = \mathrm{End}_{kG}(M)$ の中心的べき等元は単位元に限ることがわかる。□

この節ではこれ以降 <u>Hは G の p'-部分群</u>と仮定し，$\phi(e_B) \neq 0$ なるブロック Bについて考えることにする。

このとき $e_H \in RG$ で，$\widehat{H}RG = e_H RG$ は射影的 RG-加群であり，kHは半単純 k-多元環であることに注意する。

そこで $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ に対応する kG-加群を S_φとするとき，$\Psi := \{\varphi \in \mathrm{IBr}(G); k_H | S_{\varphi\downarrow H}\}$ とおく。このとき φ に対応する主直既約 RG-加群を P_φとすると，$\Psi = \{\varphi \in \mathrm{IBr}(G); P_\varphi | e_H RG\}$ であることに注意する。これから $\beta_i^* := \{\varphi \in \mathrm{IBr}(B); P_\varphi | \delta_{\beta_i}(e_H RG)\}$ を定義し，さらに $k(\beta_i) := |\beta_i|, l(\beta_i) := |\beta_i^*|$ と表記する。このとき次が成り立つ。

命題 3 互いに共通部分がない分割 $\mathrm{IBr}(B) \cap \Psi = \cup_{i=1}^{r(B)} \beta_i^*$が存在する。
特に $r(B) \leq |\mathrm{IBr}(B) \cap \Psi|$.

(証明) $M := e_B e_H RG$ とするとき, $M = \bigoplus_{i=1}^{r(B)} \delta_{\beta_i} M = \bigoplus_{\varphi \in \mathrm{IBr}(B) \cap \Psi} m_\varphi P_\varphi \quad (m_\varphi \geq 1)$.
ところで, 補題1より $\mathrm{Hom}_{RG}(\delta_{\beta_i} M, \delta_{\beta_j} M) = 0 (i \neq j)$ だから $\beta_i{}^* \cap \beta_j{}^* = \emptyset$ であり, 上の分割を得る。特に $r(B) \leq |\mathrm{IBr}(B) \cap \Psi|$ である。□

さて, $\chi \in \mathrm{Irr}(B) \cap \Phi^C$ ならば, Φ と Ψ の定義より任意の $\varphi \in \mathrm{IBr}(B) \cap \Psi$ に対して $d_{\chi,\varphi} = 0$ である。一方, $\mu \in \mathrm{Irr}(B) \cap \Phi$ とし, μ が $A_R(H)$-ブロック β_i に属するならば $d_{\mu,\varphi} \neq 0$ なる $\varphi \in \beta_i{}^*$ が存在する。β_j を β_i と異なる $A_R(H)$-ブロックとし, $\varphi' \in \beta_j{}^*$ とすると補題1より $c_{\varphi,\varphi'} = rank_R \mathrm{Hom}_{RG}(P_\varphi, P_{\varphi'}) = 0$, すなわち, $\sum_\mu d_{\mu,\varphi} d_{\mu,\varphi'} = 0$. これより任意の $\varphi' \in \beta_j{}^*$ $(j \neq i)$ に対して $d_{\mu,\varphi'} = 0$. よって D_B は次の形になる:

$$D_B = \left(\begin{array}{cccc|c} D_{\beta_1} & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & D_{\beta_2} & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & D_{\beta_{r(B)}} & * \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right) \tag{2.1}$$

さて上の D_B の分割にしたがって $D_B = (D_B{}' | D_B{}'')$, $D_B{}' = (D_1 \cdots D_{r(B)})$ とおくとき, p-ブロックの場合と同様の次が成り立つ。

命題 4

(1) 任意の $1 \leq i \leq r(B)$ に対して, $l(\beta_i) \leq k(\beta_i)$

(2) $l(\beta_i) = k(\beta_i)$ なる i が存在することと $d(B) = 0$ は同値。
特にこのとき, $r(B) = 1$.

(3) $d(B) \neq 0$ のとき, $r(B) \leq |\mathrm{Irr}(B) \cap \Phi| - |\mathrm{IBr}(B) \cap \Psi|$.
特に等号は任意の $1 \leq i \leq r(B)$ に対して, $k(\beta_i) = l(\beta_i) + 1$ のときに限る。

(証明) (1) $rank D_B = l(B)$ より $rank D_i = l(\beta_i)$ であることから言える。
(2) ($\Longrightarrow$) 仮定より $D_{\beta_i} \in GL(l(\beta_i), \mathbb{Q})$. 従って, 任意の $\chi \in \beta_i$ は G の主直既約指標の $\mathbb{Q}$-結合で書かれるので, 任意の $y \in G - G_{p'}$ に対して, $\chi(y) = 0$ となり結論がいえる。
($\Longleftarrow$) $k(B) = l(B) = 1$ より示せる。
(3) (1) と (2) より $|\mathrm{Irr}(B) \cap \Phi| - |\mathrm{IBr}(B) \cap \Psi| = \sum_{i=1}^{r(B)} \{k(\beta_i) - l(\beta_i)\} \geq r(B)$
等号は上で等号が成立するときよりいえる。□

上の D_B の形 (2.1) から $A_R(H)$-ブロック β_i の直交関係である次が成り立つ。

定理 5 任意の $y \in G - G_{p'}$ および $\langle x, H \rangle$ が p'-群となる任意の $x \in G_{p'}$ に対して,

$$\sum_{\chi \in \beta_i} \chi(x e_H) \chi(y) = 0 .$$

(証明) 分解定数を用いて

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{\chi\in\beta_i}\chi(xe_H)\chi(y) &= \textstyle\sum_{\chi\in\beta_i}\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(B)} d_{\chi,\varphi}\varphi(xe_H)\chi(y)\\ &= \textstyle\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(B)}\varphi(xe_H)\sum_{\chi\in\beta_i} d_{\chi,\varphi}\chi(y)\end{aligned}$$

従って $\varphi(xe_H)\neq 0$ なる φ のみ考えればよい。ここで $\langle x,H\rangle$ が p'-部分群であることから $M^*=S_{\varphi\downarrow\langle x,H\rangle}$ なる $R\langle x,H\rangle$-加群 Mが存在し，$\varphi|_{\langle x,H\rangle}$は Mの R-表現の指標になっている。故に$\varphi(xe_H)\neq 0$ ならば，$Mxe_H = Me_H \neq 0$，つまり，$\varphi\in\Psi$.

このとき D_Bの形 (2.1) から，$\sum_{\chi\in\beta_i} d_{\chi,\varphi}\chi(y)=\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} d_{\chi,\varphi}\chi(y)=0$ となり結論がいえる。□

3 連結次数について

この節では $\mathbb{R}$ 上の列ベクトルやその集合を考える。

$\mathbb{R}$ 上の列ベクトル a,b に対して，通常の内積 $\langle,\rangle$ を使って $\langle a,b\rangle\neq 0$ であるとき $a\approx b$と表すことにし，次を定義する。

定義 6 (1) $\mathbb{R}$ 上の 0 でない列ベクトルの集合 $\Omega=\{a_1,\cdots,a_n\}$ について $a_{f(1)}\approx\cdots\approx a_{f(n)}$ なる置換 fが存在するとき，Ωは連結集合であると言う。

(2) Ωが以下の条件 (i), (ii) を満たす分解 $\Omega=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_s$を持つとき，この分解を$\Omega$の連結分解と呼ぶ：(i) 各$\Omega_i$が連結集合である。

(ii) 任意の $1\leq i\neq j\leq s$ に対して $\Omega_i\cap\Omega_j=\emptyset$

さらに連結分解の内で s が最小になるとき，この分解を Ωの最小連結分解と呼び，そのときの s を $c(\Omega)$ と表し，Ωの連結次数と言う。(ただし $c(\emptyset)=0$ と定義する。)

補題 7 $a\in\Omega$のとき $c(\Omega-\{a\})\leq c(\Omega)+1$ である。

(証明) Ωが連結で，$\Omega-\{a\}\neq\emptyset$ の場合に示せばよい。

このとき以下の 2 つの場合を考察して結論を得る。

(i) $\Omega-\{a\}$ が連結集合であるとき，$c(\Omega-\{a\})=1=c(\Omega)$

(ii) $\Omega-\{a\}$ が連結集合でないとき，$c(\Omega-\{a\})=2=c(\Omega)+1$. □

補題 8 Ωが次の条件を満たす分解 $\Omega=\Omega'_1\cup\cdots\cup\Omega'_t$を持つと仮定する：

任意の $1\leq i\neq j\leq t$ に対して，$\Omega'_i\cap\Omega'_j=\emptyset$ かつ $\Omega'_i\perp\Omega'_j$

このとき $t\leq c(\Omega)$.

(証明) $\Omega=\Omega_1\cup\cdots\cup\Omega_s$を$\Omega$の最小連結分解（つまり $s=c(\Omega)$）とする。各 Ω_iは連結であるから，$\Omega_i\cap\Omega'_{i'}\neq\emptyset$ なる i'は唯一存在し，従って$\Omega_i\subset\Omega'_{i'}$となる。これより $t\leq c(\Omega)$ となることがわかる。□

行列 Dに対し，それを列ベクトルの集合とみたときも同じ記号で表すことにするとき，上から次の評価式を得る。

命題 9 Hが p'-部分群であるとき，$r(B) \leq |\mathrm{IBr}(B) \cap \Psi^C| + c(D_B)$.
(証明) $r(B) \neq 0$ としてよい。$n := |\mathrm{IBr}(B) \cap \Psi^C|$ とおき，(2.1) の記号にしたがって $D_B'' = (d_1 \cdots d_n)$ と書くことにする。さらに列ベクトルの集合 $A_i (1 \leq i \leq n)$ を $A_1 := D_B - \{d_n\}$ とし，$1 \leq i \leq n-1$ に対しては帰納的に $A_{i+1} := A_i - \{d_{n-i}\}$ と定義する。補題 7 と $D_B' = A_n$ より，$c(D_B') \leq c(D_B) + n$. さらに $D_B' = D_1 \cup \cdots \cup D_{r(B)}$は上の補題 8 の条件を満たすから，$r(B) \leq c(D_B')$. 従って $r(B) \leq n + c(D_B)$. □

4 主 $A_R(H)$-ブロックに関する例

自明な指標 1_Gは任意の部分群 Hに対してΦに属するから，1_Gの属する G の $A_R(H)$-ブロックが常に存在する。そこで通常の p-ブロックの場合に習ってそれを主 $A_R(H)$-ブロックと呼び，β_0と表記する。
この節では主に主 $A_R(H)$-ブロックを考え，B_0は主 p-ブロックとする。
このとき次が成り立つ。

命題 10 $|G : H|$ が p の巾ならば，$\beta_0 = \mathrm{Irr}(B_0) \cap \Phi$，すなわち，$r(B_0) = 1$ である。
(証明) 仮定より $\widehat{H}RG$ は B_0に属する直既約 RG-加群であるから，その直既約性より結論が言える。□

これ以降再び Hは G の p'-部分群と仮定し，$\phi(e_B) \neq 0$ なるブロック Bを考える。

従って 2 節と同様の記号を使うことにすると次が成り立つ。

命題 11 $\mathrm{Irr}(B) \cap \Phi$に属する全ての指標が線形 (すなわち次数が 1) であるならば，$\mathrm{Irr}(B) \subset \Phi$ であり，$\mathrm{Irr}(B)$ は G の $A_R(H)$-ブロックである。特に $r(B) = 1$ である。
(証明) 任意の $\chi \in \mathrm{Irr}(B) \cap \Phi$を取り，$A_R(H)$-ブロック$\beta_i$に属するとすると，仮定から任意の$\lambda \in \beta_i$に対して，$\lambda|_H = 1_H$である。従って Hが G の p'-部分群であるから，任意の $x \in G$ に対して，$1/|G| \sum_{\lambda \in \beta_i} \lambda(1)\lambda(\widehat{Hx}) \in R$であることと $1/|G| \sum_{\lambda \in \beta_i} \lambda(1)\lambda(x) \in R$であることは同値。これより $\mathrm{Irr}(B) = \beta_i$となり，$\mathrm{Irr}(B)$ が G の $A_R(H)$-ブロックであることがわかる。
□

補題 12 (1) 任意の $S \in \mathrm{IRR}(B^*)$ に対して $k_H | S_{\downarrow H}$ならば，$\mathrm{Irr}(B) \subset \Phi$である。
(2) G が p-可解群であるとき，上の逆が成り立つ。すなわち，
$\mathrm{Irr}(B) \subset \Phi$ならば，任意の $S \in \mathrm{IRR}(B^*)$ に対して $k_H | S_{\downarrow H}$である。

(証明) (1) 分解定数を考えればよい。

(2) Fong-Swan の定理 ([3, Chapter 5 Theorem 7.5]) よりいえる。□

以上から p-べき零群 G とその p'-部分群 H に関して次がいえる。

命題 13 G が p-べき零群ならば，$\mathrm{Irr}(B)\cap\Phi$は $A_R(H)$-ブロック，すなわち，$r(B)=1$ である。

特に $\mathrm{Irr}(B_0)\subset\Phi$であり，$\beta_0=\mathrm{Irr}(B_0)$ である。

(証明) 前半：命題2よりいえる。

後半：任意の $S\in\mathrm{IRR}(B_0)$ に対して，$H\leq\mathcal{O}_{p'}(G)\leq Ker_G S$であるから，$\mathrm{Irr}(B_0)\subset\Phi$ となり結論がいえる。□

また奇素数次の対称群に関して次が成立する。

定理 14 p が奇数であるとき，$G:=\mathfrak{S}_p$とその p'-部分群 $H:=\mathfrak{S}_i$ $(1\leq i\leq p-1)$ に対して，$r(B_0)=1$ である。

(証明) $P:=\langle(1,2,\cdots,p)\rangle$ とすると $P\in Syl_p(G)$ であり，$C_G(P)=P$であるから $N_G(P)$ の p-ブロックは主ブロックのみである。したがって Brauer の第一主定理より G の p-ブロックは主ブロックと不足数0のブロックだけからなる。ゆえに [2, (20.1)Theorem] から，既約 KG-加群が主ブロックに属することとそれに対応する分割の型が $(p-t,1^t)(0\leq t\leq p-1)$ のいずれかであることは同値（ただし $t=0$ のときは (p), $t=p-1$ のときは (1^p) を表わす。）であり，さらに [2, (24.1)Theorem] から D_{B_0}が次の形であることが知られている：

$$D_{B_0}=\begin{array}{l}(p)\\(p-1,1)\\(p-2,1^2)\\\vdots\\(2,1^{p-2})\\(1^p)\end{array}\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&0&\cdots&1&1\\0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix}$$

ここで $0\leq t\leq p-1$ において，$(p-t,1^t)\in\Phi\Longleftrightarrow t\leq p-i$ であることに注意すると D_B の形 (2.1) より，$r(B_0)=1$ である。□

注意 15：上の定理で任意の p'-部分群に対して $r(B_0)=1$ ではない。
実際 $G:=\mathfrak{S}_5, p=5, H:=\langle(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)\rangle$ のとき $r(B_0)=2$ である。

参考文献

[1] C. W. Curtis and I. Reiner : Methods of Representation Theory with Application to Finite Groups and Orders-Volume I, John Wiley and Sons, New York, 1981.

[2] G. D. James : The Representation Theory of Symmetric Groups, Lecture notes in Mathematics 682, 1978) .

[3] H. Nagao and Y. Tsushima : Representations of Finite Groups, Academic Press, 1989.

[4] G. R. Robinson : *Some Remarks on Hecke Algebras*, J. of Algebra, vol.163, 806-812, 1994.